Trigonometria
Megoldások

1) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű! (14 pont)

Megoldás:

Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, ezért $\alpha+\gamma=180-\beta$, valamint $\beta+\gamma=180-\alpha$ (1 pont)

és $\cos(180-\beta)=-\cos\beta$, valamint $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$ (1 pont)

A megadott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha:\sin\beta=\cos\beta:\cos\alpha$ (1 pont)

Ebből a $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta$ egyenlőség következik (1 pont)

A kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot használva kapjuk, hogy $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ (3 pont)

Egy háromszög bármely szög kétszeresének értéke 0° és 360° közé esik, ezért a fenti egyenlőség két esetben áll fenn: (3 pont)

$2\alpha=2\beta$, vagy $2\alpha+2\beta=180$ (2 pont)

Az első esetben $\alpha=\beta$, tehát a háromszög **egyenlő szárú** (1 pont)

A második esetben $\alpha+\beta=90$, így $\gamma=90$, a háromszög **derékszögű** (1 pont)

Összesen: 14 pont

2) Jelölje *H* a $[0;2\pi[$ intervallumot. Legyen *A* a *H* azon *x* elemeinek halmaza, amelyekre teljesül, hogy $2^{\sin x}>1$ egyenlőtlenség, és *B* a *H* azon részhalmaza, amelynek *x* elemeire teljesül a $2^{\cos x}<1$ egyenlőtlenség. Adja meg az *A* halmazt, *B* halmazt és az $A\setminus B$ halmazt! (13 pont)

Megoldás:

Az egyenlőtlenségeket írjuk $2^{\sin x}>2^0$, illetve $2^{\cos x}<2^0$ alakba (2 pont)

A 2-es alapú exponenciális függvény szigorú monoton nő (1 pont)

ezért $2^{\sin x}>1$ pontosan akkor teljesül, ha $\sin x>0$ (1 pont)

ezért $2^{\cos x}<1$ pontosan akkor teljesül, ha $\cos x<0$ (1 pont)

Az alaphalmazon a $\sin x>0$ egyenlőtlenség megoldása $0<x<\pi$ (2 pont)

azaz $\boldsymbol{A}=]0;\pi[$ (1 pont)

Az alaphalmazon a $\cos x<0$ egyenlőtlenség megoldása $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ (2 pont)

azaz $\boldsymbol{B}=\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ (1 pont)

Mindezek alapján $\boldsymbol{A\setminus B}=\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a *t* valós paraméter függvényében:

$\underline{a}(\cos t;\sin t)$ **és** $\underline{b}(\sin^2 t;\cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha *t* az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) **(5 pont)**

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! **(7 pont)**

Megoldás:

a) $\underline{a}\left(\cos\frac{5\pi}{6};\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{\boldsymbol{a}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

$\underline{b}\left(\sin^2\frac{5\pi}{6};\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{\boldsymbol{b}}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ (1 pont)

b) Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α-val. A koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\underline{a}\underline{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$

(1 pont)

illetve $\underline{a}\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos\alpha$ (1 pont)

Mivel $|\underline{a}|=1$ és $|\underline{b}|=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ (1 pont)

Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$, ebből $\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\approx 0{,}2005$ (1 pont)

Innen $\alpha\approx 78{,}43°$. **Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78°-os szöget zár be**. (1 pont)

c) A két vektor akkor és csak akkor merőlege egymásra, ha $\underline{a}\underline{b}=0$ (1 pont)

A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\underline{a}\underline{b}=\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x$, így a $\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik:

$\cos x\sin x(\sin x+\cos x)=0$ (1 pont)

Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha

$\cos x=0$ vagy $\sin x=0$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (1 pont)

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol $n\in\mathbb{Z}$ vagy $x=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (2 pont)

A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\mathrm{tg}x=-1$ egyenletével

(1 pont)

Azaz $x=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$

A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $\boldsymbol{t=n\cdot\frac{\pi}{2}}$ vagy $\boldsymbol{t=\frac{3\pi}{4}+m\pi}$, **ahol** $\boldsymbol{n,m\in\mathbb{Z}}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

4) Hány $(x;y)$ rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0;2\pi]$ zárt intervallum elemi?

$$\left.\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

Megoldás:

Az (1) egyenletből felhasználva, hogy egy szorzat pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője 0, két eset adódik: $\sin x = 0$, $\cos y = 0$ (2 pont)

$\sin x = 0$ eset:

Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt 3 x érték tesz eleget az (1) egyenletnek: $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$ (1 pont)

A $\sin x = 0$ feltételt behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin^2 y = \frac{1}{4}$ (1 pont)

tehát $\sin y = \frac{1}{2}$ (1 pont)

és $\sin y = -\frac{1}{2}$ (1 pont)

a $\sin y = \frac{1}{2}$ egyenletnek két y érték tesz eleget: $y_1 = \frac{\pi}{6}, y_2 = \frac{5\pi}{6}$ (1 pont)

a $\sin y = -\frac{1}{2}$ egyenletnek két y érték tesz eleget: $y_3 = \frac{7\pi}{6}, y_4 = \frac{11\pi}{6}$ (1 pont)

Így összesen 4 y érték tesz eleget az egyenletrendszernek ebben az esetben (1 pont)

Tehát ebben az esetben $3 \cdot 4 = 12$ darab $(x;y)$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek (1 pont)

$\cos y = 0$ eset:

Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt két y érték tesz eleget az (1) egyenletnek: $y_5 = \frac{\pi}{2}, y_6 = \frac{3\pi}{2}$ (1 pont)

Ha $\cos y = 0$, akkor $\sin^2 y = 1$ (1 pont)

Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin x = -\frac{3}{4}$ (1 pont)

ami a $[0;2\pi]$ intervallumon két x értékre teljesül $(x_1 \approx 3{,}9897, x_2 \approx 5{,}4351)$ (1 pont)

Ebben az esetben $2 \cdot 2 = 4$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek (1 pont)

A $\sin x = 0$ és a $\cos y = 0$ esetekben különböző számpárokat kaptunk, így összesen $12 + 4 = \mathbf{16}$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0, x \neq 1$ és $y > 0, y \neq 1$.

$$\left.\begin{aligned} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1 \end{aligned}\right\}$$

(13 pont)

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2$ (2 pont)

Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1 (2 pont)

ezért $\log_x y = 1$ (1 pont)

azaz $x = y$ (1 pont)

Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5x = 1$, azaz $\sin 5x = \frac{1}{2}$ (1 pont)

Innen $5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (1 pont)

vagy $5x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ (1 pont)

ahol $k \in \mathbb{N}$ és $l \in \mathbb{N}$ (1 pont)

A megoldások így: $\boldsymbol{x_1 = y_1 = \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{N})}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x_2 = y_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{5} \cdot l \cdot \pi \ (l \in \mathbb{N})}$ (1 pont)

A kapott értékek kielégítik az egyenletet (1 pont)

Összesen: 13 pont

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\boldsymbol{\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x + 7\sin x + 12{,}25}}$$

(16 pont)

Megoldás:

A gyökök teljes négyzetté állnak:

$\sqrt{(\sin x - 2)^2} + \sqrt{(\sin x + 2)^2} = \sqrt{(\sin x + 3{,}5)^2}$ (2 pont)

Elvégezve a gyökvonást:

$|\sin x - 2| + |\sin x + 2| = |\sin x + 3{,}5|$ (2 pont)

Mivel $-1 \le \sin x \le 1$, ezért

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + 2 > 0 \\ \sin x - 2 < 0 \\ \sin x + 3{,}5 > 0 \end{array}\right\} \text{minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén}$$ (3 pont)

Így az abszolút értékek elhagyása után:

$-\sin x + 2 + \sin x + 2 = \sin x + 3{,}5$ (2 pont)

$\sin x = \frac{1}{2}$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ (2 pont)

és $\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi}$ (2 pont)

ahol $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=0\end{aligned}\right\}$$ **(16 pont)**

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek (1 pont)
Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:
$\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)=2+\log_x y+3\log_y x+1=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$ (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$ (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2 (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x=y$ (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$ (2 pont)
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$,

azaz $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

Összevetve az $x,y>0$ feltétellel, $\boldsymbol{x=y=\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\cos 2x+4\sin^2 x-5\sin x-4=0$$ **(12 pont)**

Megoldás:

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ felhasználásával (2 pont)
a megoldandó egyenlet: $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$ (1 pont)

A $\sin x$-re másodfokú egyenlet megoldásai $-\frac{1}{2}$ és 3. (2 pont)

A $\sin x=3$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen $\sin x$ maximális értéke 1
(2 pont)

A $\sin x=-\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai:

$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ (2 pont)

vagy $\boldsymbol{x=\frac{7\pi}{6}+2n\pi}$, ahol $\boldsymbol{n\in\mathbb{Z}}$ (2 pont)

A kapott számok megoldásai az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! **(5 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$$ **(6 pont)**

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 6. feladat*

b) Vezessünk be új ismeretlent: $y = \cos x$!

A $2y^3 - 5y^2 - 3y = 0$ egyenletnek keressük a valós gyökeit, melyeket az a) feladatrészből tudhatunk is: $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = 3$. (1 pont)

Mivel a $\cos x$ kifejezés értéke -1 és 1 között mozoghat csak, ezért a 3 nem jó megoldás. (1 pont)

A $\cos x = 0$ egyenlet megoldása: $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$ (2 pont)

A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $\boldsymbol{x_{2,3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi}$, ahol $\boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$ (2 pont)

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos kifejezések 11. feladat*

Összesen: 16 pont

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x}$ **(5 pont)**

b) $\boldsymbol{25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet jobb oldalát azonosság alkalmazásával alakítva:

$2\sin x - 2\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$. (1 pont)

$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$, (1 pont)

Innen $\sin x = 1$, (1 pont)

$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos kifejezések 12. feladat*

Összesen: 12 pont

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{\sin x - \cos^2 x = -1}$ **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{\left|x - |x|\right| = 2x + 1}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítése. (1 pont)

Nullára rendezve: $\sin^2 x + \sin x = 0$. (1 pont)

Szorzattá alakítás után: $\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0$. (1 pont)

$\sin x = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

$\sin x = -1$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi, l \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Abszólútértékes és gyökös kifejezések 10. feladat*

Összesen: 13 pont

12)

a) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0,2 \\ \frac{\lg x+\lg y}{2}&=\lg\frac{x+y}{2} \end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ halmazon a $2\sin^2 x-\cos x=2$ egyenletet! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos kifejezések 13. feladat*

b) $2(1-\cos^2 x)-\cos x=2$ (1 pont)

$2\cos^2 x+\cos x=0$ (1 pont)

$\cos x=0$ vagy $\cos x=-\frac{1}{2}$ (1 pont)

$\cos x=0$ a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{2}}$ vagy $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}}$. (1 pont)

$\cos x=-\frac{1}{2}$ a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x=-\frac{2\pi}{3}}$ vagy $\boldsymbol{x=\frac{2\pi}{3}}$. (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással. (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x\ge\frac{1}{2}$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\frac{x}{5}-4}<20$ **(4 pont)**

c) Hány olyan egész szám van. amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?

$\log_{0,5}(2x+100)\ge-8$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi,}$ (2 pont)

ahol $k\in\mathbb{Z}$. (1 pont)

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 11. feladat*

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos kifejezések 16. feladat*

Összesen: 14 pont